60 de ani

Colegiul Național „Vasile Lucaciu”

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Determinați funcțiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că funcția $f + 3g$ este o primitivă a funcției $2f - g$, iar funcția $5f - 6g$ este o primitivă a funcției $10f + 2g$.

Subiectul 2. Determinați funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$f'\left(x\sqrt{x^2+1}\right) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul 3. Fie o mulțime *S* cu cel puțin două elemente și o lege de compoziție asociativă „$\cdot$” pe *S*, cu proprietățile:

(1) $\forall\, x, y \in S,\ xy^3 = yx^3$

(2) $\forall\, x, y \in S,\ x^2y = y^2x$

(3) $\forall\, x \in S,\ x^4 = x$.

a) Demonstrați că $(S, \cdot)$ nu poate fi grup.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$\cdot$” este comutativă pe *S*.

c) Dați exemplu de mulțime *S* cu proprietățile din enunț.

Subiectul 4. Se consideră legea de compoziție asociativă $\circ : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, există $y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x \circ y \neq y \circ x$.

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*, \text{ cu } x \neq y,\ f(x \circ y) = \frac{x+y}{x-y} \cdot \left(f(x) - f(y)\right).$$

Gazeta Matematică

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

COLEGIUL NAȚIONAL VASILE LUCACIU

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Determinați funcțiile derivabile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că funcția $f+3g$ este o primitivă a funcției $2f-g$, iar funcția $5f-6g$ este o primitivă a funcției $10f+2g$.

Soluție: $(f+3g)'=2f-g$, deci $f'+3g'=2f-g$ 1p

$(5f-6g)'=10f+2g$, deci $5f'-6g'=10f+2g$ 1p

Obținem $f'=2f$ și $g'=-\dfrac{1}{3}g$ 1p

$\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\left(f(x)\cdot e^{-2x}\right)'=f'(x)\cdot e^{-2x}-2f(x)\cdot e^{-2x}=0$, deci $f(x)=a\cdot e^{2x}$ $(a\in\mathbb{R})$ 2p

$\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\left(g(x)\cdot e^{\frac{x}{3}}\right)'=g'(x)\cdot e^{\frac{x}{3}}+\dfrac{1}{3}g(x)\cdot e^{\frac{x}{3}}=0$, deci $f(x)=b\cdot e^{-\frac{x}{3}}$ $(b\in\mathbb{R})$ 2p

Subiectul 2. Determinați funcțiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$f'\left(x\sqrt{x^2+1}\right)=x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Soluție: Considerăm funcția derivabilă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\sqrt{x^2+1}$.

Deoarece $g'(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}>0$, rezultă că g este strict crescătoare, deci este injectivă. 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ și g este continuă, deci $\operatorname{Im} g=\mathbb{R}$, așadar g este surjectivă.

În consecință, funcția g este bijectivă 1p

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=x\cdot\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, deci $f\circ g\in\displaystyle\int\frac{2x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ 1p

$$\int\frac{2x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2+1}=\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}+\mathcal{C},$$

așadar există $k\in\mathbb{R}$, astfel încât $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=\dfrac{2x^2-1}{3}\sqrt{x^2+1}+k$. 2p

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x\sqrt{x^2+1}=g(x)\Leftrightarrow x^4+x^2=g^2(x)\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+g^2(x).$$

Obținem $x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + g^2(x)} - \frac{1}{2}$, deci $x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4g^2(x)+1} - 1\right)$ 1p

De aici, $f(g(x)) = \frac{\sqrt{4g^2(x)+1}-2}{3} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4g^2(x)+1}+1}{2}} + k$ și cum g este bijectivă, deducem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}-2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{4x^2+1}}{2}} + k$, cu $k \in \mathbb{R}$. 1p

Observație:

$f \in \int g^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$, deci se obține o soluție alternativă, folosind schimbarea de variabilă $x = g(t)$.

Subiectul 3. Fie o mulțime *S* cu cel puțin două elemente și o lege de compoziție asociativă „$\cdot$” pe *S*, cu proprietățile:

(1) $\forall\, x, y \in S$, $xy^3 = yx^3$

(2) $\forall\, x, y \in S$, $x^2 y = y^2 x$

(3) $\forall\, x \in S$, $x^4 = x$.

a) Demonstrați că $(S, \cdot)$ nu poate fi grup.

b) Demonstrați că legea de compoziție „$\cdot$” este comutativă pe *S*.

c) Dați exemplu de mulțime *S* cu proprietățile din enunț.

Dana Heuberger

Soluție: a) Presupunem că $(S, \cdot)$ este un grup, cu elementul neutru *e*. Pentru $y = e$ în **(2)** obținem că $\forall\, x \in S$, $x^2 = x$. 1p

Înmulțind egalitatea precedentă cu x^{-1} rezultă că $\forall\, x \in S$, $x = e$, fals. Așadar $(S, \cdot)$ nu poate fi grup. 1p

b) $yx \overset{(3)}{=} yx^4 = (yx^3)x \overset{(1)}{=} xy^3x \quad (4)$ 1p

$yx \overset{(4)}{=} xy^3x = xy(y^2x) \overset{(2)}{=} (xy)(x^2y) \overset{(4)}{=} (yx^3y)x^2y = yx(x^2y)x^2y \overset{(2)}{=} yx(y^2x)x^2y = yxy(yx^3)y$ 1p

$yx = yxy(yx^3)y \overset{(1)}{=} yxy(xy^3)y = yxyxy^4 \overset{(3)}{=} (yx)^2 y \overset{(2)}{=} y^2(yx) = y^3x \quad (5)$ 1p

$$yx \overset{(3)}{=} y^4x = y(y^3x) \overset{(5)}{=} y(yx) = y^2x \quad (6)$$

Înlocuind *x* cu *y* și *y* cu *x* în (6), obținem $xy = x^2y \overset{(2)}{=} y^2x \overset{(6)}{=} yx$. 1p

c) Pentru $x = y$ în (6), obținem $x^2 = x^3$, deci $x^3 = x^4$. Rezultă că $x^2 = x^4 \overset{(3)}{=} x$, $\forall\, x \in S$.

Un exemplu este $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, cu înmulțirea uzuală a matricelor. …………………. 1p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 4. Se consideră legea de compoziție asociativă $\circ : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, există $y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x \circ y \neq y \circ x$.

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \text{ cu } x \neq y,\ f(x \circ y) = \frac{x+y}{x-y} \cdot \left(f(x) - f(y)\right).$$

SGM, Ioan Băetu

Soluție: Notăm cu (1) relația din enunț.

Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Alegem $y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x \circ y \neq y \circ x$. Evident, $x \neq y$.

Din (1), $f(y \circ x) = \frac{y+x}{y-x} \cdot \left(f(y) - f(x)\right) = \frac{x+y}{x-y} \cdot \left(f(x) - f(y)\right) = f(x \circ y)$, așadar avem:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $x \neq y$, $f(x \circ y) = f(y \circ x)$ (2) 1p

I. Dacă $x \circ y = x$ sau $y \circ x = x$, atunci $(1) \Leftrightarrow f(x)(x-y) = (x+y)\left(f(x) - f(y)\right)$, așadar $f(x) = \frac{x+y}{2y} f(y)$ (3) 1p

II. Dacă $x \circ y \neq x$ și $y \circ x \neq x$, atunci deoarece $(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x)$, din (1) rezultă:

$f\left((x \circ y) \circ x\right) = \frac{x \circ y + x}{x \circ y - x}\left(f(x \circ y) - f(x)\right) = \frac{x + y \circ x}{x - y \circ x} \cdot \left(f(x) - f(y \circ x)\right) = f\left(x \circ (y \circ x)\right)$, și folosind (2), rezultă că $\frac{x \circ y + x}{x \circ y - x}\left(f(x \circ y) - f(x)\right) = \frac{x + y \circ x}{y \circ x - x} \cdot \left(f(x \circ y) - f(x)\right)$ (4). ………………..... 1p

Dacă $f(x \circ y) \neq f(x)$, din (4) rezultă $\frac{x \circ y + x}{x \circ y - x} = \frac{x + y \circ x}{y \circ x - x}$, deci $x \circ y = y \circ x$, fals. ……………..…. 1p

Așadar $f(y \circ x) = f(x \circ y) = f(x)$ și din (1) rezultă că și în acest caz $f(x) = \frac{x+y}{2y} f(y)$. …….. 1p

Din I și II deducem că indiferent dacă $x \circ y \neq x$ și $y \circ x \neq x$ sau nu, relația (3) este adevărată, iar $f(y \circ x) = f(x \circ y) = f(x)$.

Înlocuind *y* cu *x* și *x* cu *y* în (3), obținem $f(y) = \frac{y+x}{2x} f(x)$, deci $f(x) = \frac{x+y}{2y} \cdot \frac{y+x}{2x} \cdot f(x)$…... 1p

Dacă $f(x) \neq 0$, obținem $1 = \frac{(x+y)^2}{2xy}$, deci $(x-y)^2 = 0$, fals. Așadar $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. ……... 1p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro